

относительно простых случаях (топографическая задача), вызывает большие сложности, требующие конкретного решения в каждом отдельном случае. Для более обобщенного подхода необходим способ быстрой разработки алгоритма и программного обеспечения. Таким способом может оказаться специализированный язык программирования.

Список литературы: 1. Тесленко А.А. Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 2. Тесленко А.А. Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. 3. Тесленко А.А. Автоматизация пьезооптических измерений // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. 4. Тесленко А.А. Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 32. – С. 169-171. 5. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л., Тихонова Е.В. Систематическое исследование метода наклонного просвечивания. Часть I. // Препринт-ИМК-91-4, Харьков. – 1991. – С. 67. 6. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л., Тихонова Е.В. Систематическое исследование метода наклонного просвечивания. Часть II. // Препринт-ИМК-91-5, Харьков. – 1991. – С. 78. 7. Тесленко А.А. Систематическое исследование метода наклонного просвечивания. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 167-170.

Поступила в редколлегию 17.11.2008

УДК 539.3:517.968+517.956

Ю.С.ШУВАЛОВА, УкрГАЗТ, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН МЕТОДАМИ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Розглянуто другу основну задачу динаміки тонких пружних пластин у рамках моделі Кірхгофа. За допомогою динамічного аналога потенціалу простого шару задача зводиться до системи нестационарних граничних рівнянь. Для прямокутної пластинки отримано явний вигляд граничних інтегральних рівнянь. Одержані чисельні результати.

The second basic dynamic problem for thin elastic plates in Kirchhoff model is under consideration. Its decision is submitted by dynamic analogue of a single layer potential. This representation results in system of the non-stationary boundary equations. The obvious kind of the boundary integral equations is received for a rectangular plate. The numerical results are received.

Введение. Тонкие упругие пластины являются элементами многочисленных конструкций, используемых в аэрокосмической, электронной технике и многих других отраслях промышленности. Поэтому развитие методов вычисления напряжений, возникающих в пластине очень важная задача. В статье предложен вариант метода теории потенциалов, позволяющий свети задачу к

системе граничных нестационарных уравнений. При дальнейшей численной реализации рассматривается пластина прямоугольной формы. Метод исследования основан на схеме, развитой в [1–4] в задачах классической динамической теории упругости.

1 Обозначения и постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая пластина, занимающая область $\Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, где Ω – некоторая область в \mathbb{R}^2 ($h = \text{const}$). Вектор смещения точки (x, x_3) пластины, где $x = (x_1, x_2)$, имеет вид $(-x_3 \partial_1 u(x, t), -x_3 \partial_2 u(x, t), u(x, t))$, где $u(x, t)$ – смещение точки x срединной плоскости пластины в направлении, перпендикулярном этой плоскости в недеформированном состоянии, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$. Функция $u(x, t)$ является решением смешанной задачи (1.1):

$$\begin{aligned} \rho h \partial_t^2 u(x, t) + \tilde{D} \Delta^2 u(x, t) &= q(x, t), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), \end{cases} & x \in \Omega, \\ \begin{cases} (Qu)(x, t) = g_1(x, t), \\ (-Mu)(x, t) = g_2(x, t), \end{cases} & (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\Gamma = \partial\Omega$; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$; $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, ∂_n – производная по внешней нормали $n(x) = (n_1(x), n_2(x))$ к контуру Γ , ρ – поверхностная плотность пластины, $\tilde{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – ее цилиндрическая жесткость, $q(x, t)$ – плотность внешних сил, действующих на пластину.

$$\begin{aligned} Qu &= -D(\partial_n \Delta u + (1-\nu) \partial_\tau [n_1 n_2 (\partial_2^2 u - \partial_1^2 u) + (n_1^2 - n_2^2) \partial_1 \partial_2 u]), \\ -Mu &= D(\Delta u + (1-\nu)(2n_1 n_2 \partial_1 \partial_2 u - n_2^2 \partial_1^2 u - n_1^2 \partial_2^2 u)), \end{aligned} \quad (1.2)$$

– операции обобщенной перерезывающей силы и изгибающего момента. $D = \tilde{D} / \rho h$, ∂_τ – производная в направлении касательного к Γ орта τ , полученного из n поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки [5].

Поскольку имеющиеся неоднородности можно перенести в краевые условия, то далее будет рассматриваться задача для однородного уравнения колебаний пластины и однородных начальных условий.

2 Динамический потенциал. Пусть $\Phi(x, t)$ – фундаментальное решение уравнения колебаний пластины, удовлетворяющее уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \Phi(x, t) + D \Delta^2 \Phi(x, t) &= \delta(x, t), \\ \Phi(x, t) &= 0, & t < 0, \end{aligned}$$

$\delta(x, t)$ – функция Дирака. Несложные вычисления дают явный вид фунда-

ментального решения:

$$\Phi(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi\sqrt{D}} \operatorname{si} \left(\frac{|x|^2}{4\sqrt{D}t} \right),$$

где $\operatorname{si}(z) = -\int_z^\infty \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu$ – интегральный синус, $\theta(t)$ – характеристическая функция полуоси $(0, \infty)$.

Запаздывающий потенциал простого слоя с заданной на $\Gamma \times \mathbb{R}$ гладкой двухкомпонентной плотностью вводится формулой:

$$(V\vec{\alpha})(x, t) = \iint_{\Gamma \times \mathbb{R}} (\Phi(x - y, t - \tau) \alpha_1(y, \tau) + \partial_{n, y} \Phi(x - y, t - \tau) \alpha_2(y, \tau)) ds_y d\tau, \quad (2.1)$$

где $\partial_{n, y}$ – операция нормальной производной, действующая по переменной y .

Потенциал $V\vec{\alpha}$ удовлетворяют однородному уравнению колебаний пластины в $\Omega \times \mathbb{R}_+$, а если плотность равна нулю при $t < 0$, то и нулевым начальным условиям. Для потенциала $V\vec{\alpha}$ справедливы формулы скачков:

$$\begin{aligned} (QV\vec{\alpha})^\pm(x, t) &= \pm \alpha_1(x, t) + (QV\vec{\alpha})^0(x, t), \\ (-MV\vec{\alpha})^\pm(x, t) &= \pm \alpha_2(x, t) + (-MV\vec{\alpha})^0(x, t), \end{aligned} \quad (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+, \quad (2.2)$$

Представив решения задачи (1.1) потенциалом простого слоя $u(x, t) = (V\vec{\alpha})(x, t)$, получим систему граничных уравнений

$$\begin{cases} (QV\vec{\alpha})^\pm(x, t) = g_1(x, t), \\ (-MV\vec{\alpha})^\pm(x, t) = g_2(x, t), \end{cases} \quad (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+. \quad (2.3)$$

Однозначная разрешимость поставленной задачи была доказана в [5] в однопараметрической шкале пространств соболевского типа.

3 Применение метода потенциалов к тонкой упругой пластине прямоугольной формы. Рассмотрим тонкую упругую пластину прямоугольной формы (рис. 1).

Учитывая формулы скачков (2.1), из системы (2.2) получен явный вид интегральных граничных уравнений. Далее приведем представление системы для $x = (x_1; 0) \in \Gamma_1$ ($0 < x_1 < a$):

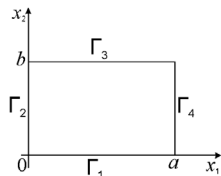


Рисунок 1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha_1(x, t) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{\Gamma} \alpha_k(y, t) Q_k(x - y, t) ds_y + \int_0^\infty \int_{\Gamma} \frac{\alpha_k(y, t) - \alpha_k(y, \tau)}{(t - \tau)^2} \tilde{Q}_k(x - y, t - \tau) ds_y d\tau \right] &= g_1(x, t), \\ \frac{1}{2} \alpha_2(x, t) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{\Gamma} \alpha_k(y, t) M_k(x - y, t) ds_y + \int_0^\infty \int_{\Gamma} \frac{\alpha_k(y, t) - \alpha_k(y, \tau)}{(t - \tau)^2} \tilde{M}_k(x - y, t - \tau) ds_y d\tau \right] &= g_2(x, t). \end{aligned}$$

1) Пусть $y = (s, 0) \in \Gamma_1$, тогда

$$Q_1(x - y, t) = 0, \quad M_2(x - y, t) = 0,$$

$$Q_2(x-y, t) = -\frac{t\sqrt{D}}{\pi} \cdot \frac{3(1-\nu)}{(x_1-s)^4} \sin \frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{Dt}} + \frac{2-\nu}{2\pi(x_1-s)^2} \cos \frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{Dt}} \approx$$

$$\approx \frac{1+\nu}{4\pi(x_1-s)^2} - \frac{3(x_1-s)^2}{128\pi Dt^2},$$

$$M_1(x-y, t) = -\frac{\nu t\sqrt{D}}{\pi(x_1-s)} \sin \frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{Dt}} + \frac{(1+\nu)\sqrt{D}}{2\pi(x_1-s)^2} \int_0^\infty \theta(t-\tau) \sin \frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)} d\tau \approx$$

$$\approx -\frac{\nu}{4\pi} + \frac{(1+\nu)}{8\pi} \ln t - \frac{(1+5\nu)(x_1-s)^4}{1536\pi Dt^2}.$$

Разбиваем Γ_1 на n частей, на каждой из которых считаем плотности $\alpha_k(y, t)$ постоянными ($\alpha_{ki}(y, t) = \text{const}, i = \overline{1, n}$).

$$\int_{\Gamma_1} \alpha_2(y, t) Q_2(x-y, t) ds_y = \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1+\nu}{4\pi(x_1-s)^2} - \frac{3(x_1-s)^2}{128\pi Dt^2} ds = \sum_{i=1}^n \alpha_{2i}(s, t) \left[\frac{1+\nu}{4\pi(x_1-s)} + \frac{(x_1-s)^3}{128\pi Dt^2} \right]_{a_{i-1}}^{a_i}.$$

Замечание. Первое слагаемое понимаем как интеграл в смысле Адамара

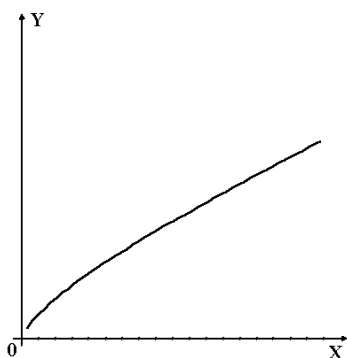
$$\int \frac{dy}{y^2} = \text{Re} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{dy}{(y+i\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{y^2 - \varepsilon^2}{(y^2 + \varepsilon^2)^2} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{y\varepsilon}{\varepsilon^2 + y^2} = -\frac{1}{y} + c.$$

$$\int_{\Gamma_1} \alpha_i(y, t) M_i(x-y, t) ds_y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{(1+\nu) \ln t - 2\nu}{8\pi} - \frac{(1+5\nu)(x_1-s)^4}{1536\pi Dt^2} ds = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\frac{((1+\nu) \ln t - 2\nu)s}{8\pi} + \frac{(1+5\nu)(x_1-s)^5}{7680\pi Dt^2} \right]_{a_{i-1}}^{a_i}$$

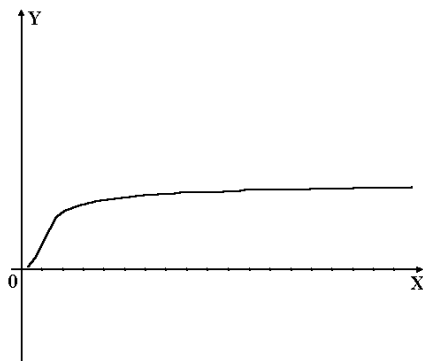
2) на остальных частях границы $\Gamma_i, i = \overline{1, 3}$

Интегралы $\int_{\Gamma_i} \alpha_k(y, t) Q_k(x-y, t) ds_y, \int_{\Gamma_i} \alpha_k(y, t) M_k(x-y, t) ds_y, k = 1, 2$ вы-

числяются аналогично.



Смещение $u(t)$ в средней точке пластины под постоянной нагрузкой $q = \text{const}$



Смещение $u(t)$ в средней точке пластины под нагрузкой $q = t^2(t-5)^2$

Рисунок 2

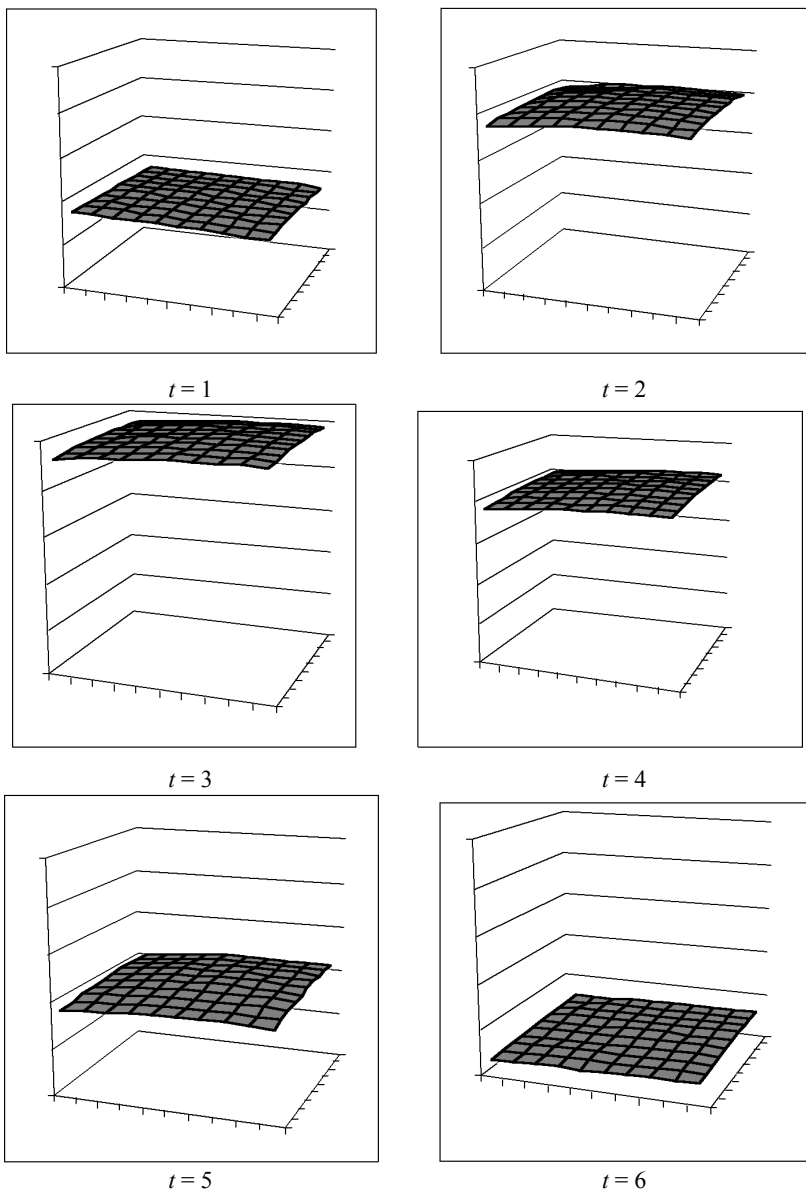


Рисунок 3

4. Численные результаты. Для численной реализации возьмем пластину размеров $1 \times 1 \times 0,1$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Края пластины свободны. То есть решается задача вида

$$\rho h \partial_t^2 u(x, t) + \tilde{D} \Delta^2 u(x, t) = q(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, +\infty),$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \partial_t u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad x \in (0, 1) \times (0, 1),$$

$$\begin{cases} (Qu)(x, t) = 0, \\ (-Mu)(x, t) = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+,$$

Рассмотрим различные варианты нагрузок $q(x, t)$.

Смещение точек пластины во времени под нагрузкой $q(x, t) = q_0 \sin t$.

Вывод. Построен динамический аналог потенциала простого слоя для второй основной задачи динамики тонких упругих пластин, который позволяет определять смещение любой точки пластины в произвольный момент времени без использования методов типа конечных разностей или конечных элементов.

Список литературы: 1. *Chudinovich I.Yu.* The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems // Math. Methods Appl. Sci., – 1993. – {\bf 16} – P. 203-215. 2. *Chudinovich I.Yu.* The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 2. Methods for approximate solutions. // Math. Methods Appl. Sci. – 1993. – {\bf 16} – P. 217-227. 3. *Chudinovich I.Yu.* Methods of potential theory in the dynamics of elastic media. // Russian J. Math. Phys. – 1993. – {\bf 1} – P. 427-446. 4. *Chudinovich I.Yu.* On the solution of the boundary equations in problems of elastic wave diffraction on the spatial cracks // Differentsial'nye uravneniya. – 1993, – {\bf 29} – P. 1648-1651. (In Russian). 5. *Chudinovich I.Yu., Gassan Yu.S.* Boundary Equations in basic Dynamic Problems for Thin Elastic Plates // Вісник Харківського національного університету, серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2000. – № 475. – С.250-258.

Поступила в редколлегию 03.11.2008.

УДК 539.3

Е.Г.ЯНЮТИН, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харьков
В.Т.ГРИШАКИН, ХНАДУ, Харьков

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ ВЯЗКО-УПРУГИХ БАЛОК

В статті пропонуються засоби розв'язання прямих та обернених задач механіки деформівного твердого тіла на прикладі балок, що перебувають під дією зосередженої рухомої сили. Задачі розглянуті як для балок теорії Кірхгоффа-Лява, так і для балок теорії С.П. Тимошенко. Урахування дисипації енергії коливань здійснено за допомогою моделі Фойгта.

The direct and inverse problems of deformable rigid body mechanics solving methods on example of beams under action of the concentrated mobile force are offered in this article. Problems are considered both for beams of the Khirhgoff theory, and for beams of the Timoshenko theory. The account of fluctuation energy dissipate is carried out by means of Foight model.